# Eléments du calcul des probabilités

# Répétition 6

**3 mai 2016**

## Exercices sur les vecteurs aléatoires gaussiens

6.1. On s'intéresse à la température corporelle de deux participants au bal des ingénieurs : un assistant et une étudiante. La température de la pièce principale a une influence directe sur la température de l'assistant et de l'étudiante. Plus il fait chaud dans la pièce, plus ils sont chauds en moyenne. Notez qu'ils ne sont pas en permanence dans la pièce, mais y passent la majorité du temps. Soit $\mathcal{T}_a$ la déviation de la température corporelle de l'assistant par rapport à sa température moyenne et $\mathcal{T}_e$ celle de l'étudiante. Soit $\mathcal{T}_p$ la déviation de la température de la pièce par rapport à sa moyenne sur la soirée. Supposons que la relation entre $\mathcal{T}_p$ et les deux variables $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{T}_e$ soit linéaire et puisse être modélisée par les équations

$$\mathcal{T}_a = a\mathcal{T}_p + \mathcal{Y} \tag{1}$$

$$\mathcal{T}_e = b\mathcal{T}_p + \mathcal{Z} \tag{2}$$

où $a > 0$ et $b > 0$ sont des constantes, et où nous supposons que les variables aléatoires $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ sont toutes les deux indépendantes de $\mathcal{T}_p$, et aussi conditionnellement indépendantes étant donnée toute fonction de la variable $\mathcal{T}_p$.

Nous supposons par ailleurs que les densités marginales des variables $\mathcal{T}_p$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ existent et sont gaussiennes, d'écart-types respectifs 3, 0,5 et 0,5.

a) Peut-on affirmer que le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{X}} = [\mathcal{T}_p, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{T}_a, \mathcal{T}_e]^T$ est un vecteur aléatoire gaussien ? Construire le graphe de factorisation (réseau bayesien) de la loi conjointe des cinq variables $\mathcal{T}_p, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{T}_a, \mathcal{T}_e$. Justifiez.

b) Mêmes questions quant au vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}' = [\mathcal{T}_p, \mathcal{T}_a, \mathcal{T}_e]^T$. Justifiez.

c) Déterminez le vecteur moyen $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ et la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ ? Est-ce que $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ possède une densité ? Justifiez, interprétez.

d) Déterminez le vecteur moyen $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}'}$ et la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}'}$ du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}'$ ? Est-ce que $\boldsymbol{\mathcal{X}}'$ possède une densité ? Justifiez, interprétez. Interprétez les termes de la matrice de covariance.

e) Déterminez et interprétez la matrice de covariance inverse du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}'$.

## Exercice suggéré

6.2. On s'intéresse au tarif de l'électricité produite par une centrale électrique, en fonction de deux paramètres : le tarif du gaz d'une part et la taxe carbone (sur l'émission de dioxyde de carbone) d'autre part. Soit $\mathcal{T}_e$ la déviation du tarif de l'électricité par rapport à sa moyenne, $\mathcal{T}_g$ celle du gaz et $\mathcal{T}_c$ celle de la taxe carbone. Supposons que la relation entre ces trois variables soit linéaire et puisse être modélisée par l'équation

$$\mathcal{T}_e = a\mathcal{T}_g + b\mathcal{T}_c + \mathcal{Z} \tag{3}$$

où $a > 0$ et $b > 0$ sont des constantes, et où nous supposons que les variables aléatoires $\mathcal{T}_g$, $\mathcal{T}_c$ et $\mathcal{Z}$ sont mutuellement indépendantes.

Nous supposons par ailleurs que les densités marginales des variables $\mathcal{T}_g$, $\mathcal{T}_c$ et $\mathcal{Z}$ sont gaussiennes, d'écart-types respectifs 5, 1 et 3.

a) Peut-on affirmer que le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{X}} = [\mathcal{T}_e, \mathcal{T}_g, \mathcal{T}_c, \mathcal{Z}]^T$ est un vecteur aléatoire gaussien ? Construire le graphe de factorisation (réseau bayesien) de la loi conjointe des quatre variables $\mathcal{T}_e, \mathcal{T}_g, \mathcal{T}_c, \mathcal{Z}$. Justifiez.

b) Mêmes questions quant au vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}' = [\mathcal{T}_e, \mathcal{T}_g, \mathcal{T}_c]^T$. Justifiez.

c) Déterminez le vecteur moyen $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ et la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ ? Est-ce que $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ possède une densité ? Justifiez, interprétez.

d) Déterminez le vecteur moyen $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}'}$ et la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}'}$ du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}'$ ? Est-ce que $\boldsymbol{\mathcal{X}}'$ possède une densité ? Justifiez, interprétez. Interprétez les termes de la matrice de covariance.

e) Déterminez et interprétez la matrice de covariance inverse du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{X}}'$.