Eléments du calcul des probabilités

Répétition 2

1 mars 2016

Exercices sur les variables aléatoires discrètes à valeurs réelles

2.1. Cédric propose à son voisin Nathan d'échanger des billes. Celui-ci lui répond qu'il préfère lancer un dé pour déterminer qui donne des billes à qui. Si le résultat est un nombre pair, Nathan reçoit 20 billes. Si le résultat est impair, Cédric reçoit 30 billes, sauf s'il s'agit d'un 1, auquel cas c'est Nathan qui reçoit 5 billes.

Soit la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prenant en argument la valeur du dé et retournant le nombre de billes gagnées par Cédric.

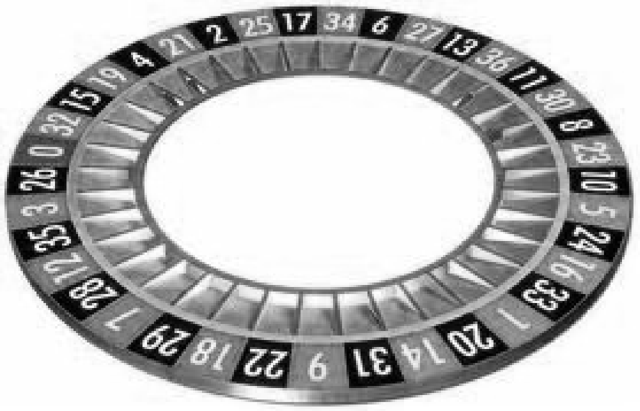
a) Déterminez la densité de probabilité de $\mathcal{X}$ pour tout $x \in \Omega_{\mathcal{X}}$.

b) Déterminez la fonction de répartition de $\mathcal{X}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Le jeu est-il équitable ? Sinon, que va gagner Cédric en moyenne ?

d) Que vaut l'écart-type de ce jeu ?

2.2. Un client entre dans un casino pour jouer à la roulette. Cette dernière est composée de 37 cases numérotées de 0 à 36. Le zéro n'a pas de couleur, 18 des cases sont rouges et les 18 autres sont noires. Le casino affiche les derniers numéros qui sont tombés : 5 (rouge), 11 (noir), 13 (noir), 30 (rouge), 11 (noir), 17 (noir), 26 (noir), 16 (rouge), 35 (noir), 4 (noir).



Le joueur décide d'utiliser une stratégie appelée la martingale, consistant à jouer sur rouge en doublant sa mise à chaque partie tant qu'il perd. Il démarre avec une mise de 1 jeton qu'il place sur le rouge. Si le rouge tombe, il reçoit 2 jetons et s'arrête (gain = 1 jeton). Sinon, il mise 2 jetons sur le rouge. Si ce dernier tombe, il reçoit 4 jetons et s'arrête (gain = 4-2-1 = 1 jeton). Sinon, il continue à doubler ses mises jusqu'à finir par réaliser un gain net de 1 jeton ou tout perdre. Le casino limite le montant maximum pouvant être misé. Soit N le nombre de fois que le joueur peut doubler sa mise sans dépasser le maximum.

a) Quelle est la probabilité pour que le joueur perde N fois de suite ? Que se passe-t-il quand N tend vers l'infini ?

b) Peut-on déduire de la réponse précédente que l'espérance de gain du joueur est de 1 jeton lorsque N tend vers l'infini ?

c) Quelle est l'espérance de gain du joueur ? Que se passe-t-il quand N tend vers l'infini ?

2.3. Lors de la coupe de Belgique de football, la probabilité qu'un club de troisième division élimine un club de première division a été estimée à 2%. Lors des 5 dernières saisons, il y a eu 27 matchs de coupe au cours desquels un club de troisième division a affronté un club de première division.

a) Quelle est la probabilité qu'exactement quatre clubs de troisième division se soient qualifiés ?

b) Quelle est la probabilité qu'au plus deux clubs de troisième division se soient qualifiés ?

c) Quelle est la probabilité qu'au moins un club de troisième division se soit qualifié ?

2.4. D'un jeu de cartes, on tire successivement 5 cartes avec remise.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piques ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 piques ?

c) Quelle est l'espérance du nombre de piques que l'on pourrait obtenir ?

d) Combien de cartes faut-il tirer successivement avec remise pour que la probabilité d'avoir au moins une pique soit supérieure à 0,95 ?

2.5. Le nombre de rhumes attrapés par un individu en l'espace d'un an est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $m = 5$. Admettons qu'un remède miracle abaisse m à 3 pour 75% de la population, mais n'ait pas d'effet appréciable sur le reste de la population. Un individu essaie ce remède pendant un an et attrape deux rhumes. Quelle est la probabilité que le remède ait un effet sur lui ?

Correction de l'exercice suggéré 1.16

Ce problème peut être résolu par une abstraction sous forme de problème jouet : soit une permutation aléatoire de la liste des naturels de 1 à N. Quelle est la probabilité qu'au moins un nombre soit à sa place de départ ? Que vaut cette probabilité lorsque $N \to \infty$?

Un autre énoncé conduisant au même problème jouet est le suivant : un jeune enfant range ses 20 DVD dans leurs coffrets (1 DVD par coffret). Ne sachant pas encore lire les titres figurant sur les DVD, il les range au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins 1 DVD soit rangé dans le bon coffret ? Calculez la limite de cette probabilité si le nombre de DVD tend vers l'infini.

Exercices suggérés

2.6. On jette une pièce équilibrée 8 fois de suite et on note les résultats : pile (P) ou face (F).

a) Quelle est la probabilité d'obtenir au maximum 6 fois F ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 3 fois F ?

c) Soient A et B les deux événements des sous-questions a) et b). Vérifier le théorème des probabilités totales (version 2) sur A et B : $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$.

2.7. On jette deux dés plusieurs fois et on envisage l'événement $E =$ *la somme des dés vaut 7*.

a) Quelle est la probabilité pour que le nombre de jets jusqu'à la première réalisation de E soit égal à K.

b) Combien de jets faut-il effectuer pour obtenir une probabilité inférieure à $\frac{1}{2}$ que E ne soit soit réalisé lors d'aucun des jets.

2.8. On sait que les vis fabriquées par une certaine société sont affectées d'un défaut avec une probabilité de 0,01 ; l'état d'une vis étant indépendant de celui des autres. La société accepte de rembourser les paquets de 10 contenant plus d'une vis ayant un défaut. Quelle proportion de paquets la société s'expose-t-elle à devoir rembourser ?

2.9. Le nombre de particules α émises par gramme de matière radioactive dans l'intervalle d'une seconde suit une loi de Poisson. Donnez une bonne approximation de la probabilité qu'au plus deux particules α soient enregistrées en une seconde, en sachant que l'espérance du nombre de particules émises est de 3,2.

2.10. EXAMEN AOUT 2014

Un appareil est équipé de 3 capteurs a, b et c. La probabilité de panne du capteur a est de 15%, celle du capteur b est de 5% et celle du capteur c est de 8%. Les pannes des capteurs sont indépendantes et l'appareil fonctionne si au moins deux capteurs fonctionnent. On note A l'événement "*le capteur a est en panne*", B l'événement "*le capteur b est en panne*" et C l'événement "*le capteur c est en panne*".

a) Quelle est la probabilité de l'événement $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$? (2 points)

b) Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne ? (4 points)

c) Sachant que l'appareil fonctionne, quelle est la probabilité que le capteur c soit en panne ? (4 points)

Une société vend des appareils par paquets de 10. Lorsqu'un client reçoit un paquet comportant plus de 2 appareils qui ne fonctionnent pas, la société s'engage à lui donner un nouveau paquet de 10 gratuitement.

d) Lorsqu'un client achète un paquet de 10, quelle est la probabilité que la société doive lui donner un nouveau paquet de 10 gratuitement ? (4 points)

e) Dans un paquet de 10 appareils, quelle est l'espérance du nombre de capteurs qui fonctionnent ? (3 points)

f) Dans un paquet de 10 appareils, quelle est la variance du nombre de capteurs qui fonctionnent ? (3 points)

2.11. EXAMEN MAI 2014

De nombreux sympathisants de l'ULg ont représenté cette dernière lors de l'Urban Tour de Liège, édition 2014. Un mois avant cette course à pied, un groupe de 9 étudiantes avait décidé d'y participer. On considère que chaque étudiante avait une chance sur trois de changer d'avis d'ici là et de ne pas venir. On peut considérer que les étudiantes ne s'influençaient pas entre-elles (prenaient leurs décisions indépendamment les unes des autres).

a) Quelle est la probabilité qu'exactement 4 des 9 étudiantes participent finalement à la course ? (4 points)

b) Quelle est la probabilité qu'au moins 7 des 9 étudiantes participent finalement à la course, sachant qu'au moins 3 des 9 étudiantes vont participer à la course ?
(6 points)

Finalement, seules 4 des 9 étudiantes ont décidé de participer. Au départ de la course, un grand nombre de participants démarraient en même temps et il y avait peu d'espace entre-eux, si bien qu'il n'était pas toujours facile de voir où on mettait les pieds. Dans ces conditions, la probabilité de ne pas voir un obstacle à temps (par exemple une bouche d'égout) et de se blesser (par exemple se tordre la cheville) a été estimée à 3%. On peut supposer que la probabilité qu'un participant se blesse est indépendante de celle des autres.

c) Quelle est la probabilité qu'exactement une des 4 étudiantes ne voit pas un obstacle à temps et se blesse ? (2 points)

d) Quelle est l'espérance du nombre d'étudiantes parmi les 4 qui ne voient pas un obstacle à temps et se blessent, sachant qu'après la course une d'entre-elles a déclaré s'être tordue la cheville sur une bouche d'égout ? (4 points)

e) Quelle est la variance du nombre d'étudiantes parmi les 4 qui ne voient pas un obstacle à temps et se blessent, sachant qu'après la course une d'entre-elles a déclaré s'être tordue la cheville sur une bouche d'égout ? Interprétez. (4 points)

2.12. EXAMEN AOUT 2013

Un client entre dans un casino avec un capital de 200€ pour jouer à la roulette. Cette dernière est composée de 37 cases numérotées de 0 à 36. Le zéro n'a pas de couleur, 18 des cases sont rouges et les 18 autres sont noires. Lorsqu'un joueur mise un montant X sur une couleur, il réalise un gain net de X si cette couleur sort et une perte nette de X dans le cas contraire. Le casino affiche les derniers numéros qui sont tombés : 5 (rouge), 11 (noir), 13 (noir), 30 (rouge), 11 (noir), 17 (noir), 26 (noir), 16 (rouge) et 35 (noir). La stratégie du joueur consiste à miser à chaque fois 20€ sur la couleur qui est sortie lors du tirage précédent. Il ne change jamais le montant misé et décide de participer à exactement 8 tirages.

a) Quelle est la probabilité pour que le joueur perde de l'argent ?

b) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?

c) Que vaut l'espérance de gain conditionnelle, sachant qu'il n'a pas perdu d'argent ?

2.13. EXAMEN JANVIER 2012

A l'occasion de ses 10 ans d'existence, une petite boulangerie locale remet à chaque client un ticket numéroté qui permet de gagner un déjeuner gratuit. Lorsqu'une personne entre dans l'établissement, trois cas de figure peuvent se présenter :

– Si la personne est reconnue comme client habituel, on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 0.
– Si la personne est reconnue comme client occasionnel, on lui remet un ticket dont le numéro se termine par 1.
– Sinon, on lui remet un ticket dont le numéro se termine par un autre chiffre que 0 et 1.

La probabilité d'un ticket dont le numéro se termine par 0 d'être gagnant est de 50%, celle d'un ticket se terminant par 1 est de 10% et celle des autres tickets n'est que de 1%. Parmi les visiteurs, 15% sont reconnus comme clients habituels et 20% comme clients occasionnels.

a) On choisit un client au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne un déjeuner gratuit ?

b) Le client qui vous précède saute de joie car il vient de gagner. Quelle est la probabilité qu'il ait été reconnu comme client habituel ?

Finalement, 19 personnes ont gagné un déjeuner gratuit et sont invitées à venir le déguster le lendemain. Tous les gagnants sont venus. Ils avaient le choix de venir seul ou accompagné d'une autre personne, qui devra payer son déjeuner. La probabilité de venir seul est de 75%. La patronne prévoit 4 tables de 6 personnes.

c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de place pour tout le monde ?

d) Le gagnant arrivant en dernier le jour du déjeuner est accompagné. Il reste exactement trois places libres. En supposant que les invités précédents aient choisi leurs places de manière totalement aléatoire, quelle est la probabilité qu'il reste deux places à la même table ?

2.14. EXAMEN SEPTEMBRE 2012

Lors de l'édition 2012 du Maasmarathon de la Meuse, 482 coureurs ont réussi à terminer la course dont 425 hommes et 57 femmes. Les organisateurs ont fait deux classements séparés, un pour les hommes et un pour les femmes. Supposons qu'ils aient utilisé le système suivant pour distribuer les prix aux hommes :

– les 10 premiers hommes gagnent d'office un prix.
– les hommes finissant de la 11ème à la 20ème place ont une chance sur deux de gagner un prix.
– les hommes finissant de la 21ème à la 100ème place ont une chance sur cinq de gagner un prix.
– les autres hommes ayant terminé la course ont une chance sur vingt de gagner un prix.

Supposons qu'ils aient utilisé le système suivant pour les femmes :

- les 5 premières femmes gagnent d'office un prix.
- les femmes finissant de la 6ème à la 10ème place ont une chance sur deux de gagner un prix.
- les femmes finissant de la 11ème à la 20ème place ont une chance sur cinq de gagner un prix.
- les autres participantes ayant terminé la course ont une chance sur vingt de gagner un prix.

a) Soit une personne A prise au hasard parmi les 482 marathoniens. Quelle est la probabilité que cette personne ait gagné un prix ?

b) Une femme déclare avoir gagné un prix. Quelle est la probabilité qu'elle ait terminé dans les 10 premières femmes ?

c) Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ rendant le nombre total de prix distribués ? (c'est-à-dire le nombre de prix gagnés par des hommes + le nombre de prix gagnés par des femmes)

Le Maasmarathon de la Meuse a eu lieu chaque année depuis 1999. Supposons que le système de prix n'ait jamais changé et qu'un homme ait participé à toutes les éditions (soit 14 au total). En sachant que l'homme a terminé la course à chaque fois, mais n'a jamais terminé dans les 100 premiers, sauf en 2009 où il a terminé 95ème et en 2010 où il a terminé 98ème.

d) Quelle est la probabilité qu'il n'ait jamais gagné de prix ?

e) Quelle est la probabilité qu'il ait gagné plus de deux prix ?

2.15. EXAMEN JUIN 2012

Un enfant joue avec une boîte contenant 8 cubes, dont 1 gros rouge, 3 petits rouges, 2 gros verts, 1 petit vert et 1 petit jaune. Il choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur). On note A l'événement *"obtenir trois cubes de trois couleurs différentes"* et B l'événement *"obtenir au maximum un petit cube"*.

a) Calculez les probabilités de A et de B.

b) A et B sont-ils des événements indépendants ?

c) Calculez l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

L'enfant répète n fois l'épreuve *"tirer simultanément trois cubes de la boîte"*, en remettant systématiquement tous les cubes dans la boîte entre les épreuves. Les tirages sont indépendants.

d) Déterminez la probabilité que B se soit réalisé au moins une fois.

e) Au minimum combien de fois l'enfant doit-il répéter l'épreuve pour que la probabilité que B se soit réalisé au moins une fois soit supérieure à 99% ?

2.16. EXAMEN JUIN 2015

François est un joueur de poker amateur, qui joue régulièrement des tournois sur internet, appelés des Sit&Go. Lors d'un Sit&Go, 9 joueurs sont assis à une table et démarrent avec le même nombre de jetons. Ils jouent jusqu'à ce qu'un des joueurs ait gagné tous les jetons. Les Sit&Go auxquels François joue coûtent 7$ par personne. La personne qui remporte le tournoi reçoit 29,03$, celle qui termine deuxième reçoit 17,41$, celle qui termine troisième obtient 11,61$ et les autres ne gagnent rien. La probabilité que François gagne un Sit&Go est de 14%, celle qu'il termine deuxième est de 13% et celle qu'il termine troisième de 12%. Pour rentabiliser son temps, François décide de jouer six Sit&Go en même temps (il dépense donc au total 42$ pour s'inscrire à ces tournois). On considère qu'il y a indépendance entre les Sit&Go.

a) Quelle est la probabilité que François ne gagne pas d'argent du tout ? (2 points)
(c'est-à-dire qu'il ne finisse pas une seule fois dans les trois premiers)

b) Quelle est la probabilité que François remporte au moins un Sit&Go ? (2 points)

c) Quelle est la probabilité que François ait remporté au moins deux Sit&Go, sachant qu'il a gagné de l'argent lors d'exactement trois Sit&Go ? (4 points)

d) Que vaut l'espérance de gain net de François ? (3 points)

e) Que vaut l'écart-type du gain net de François ? (3 points)

f) Quelle est la probabilité que François ait terminé en négatif ? (4 points)
(finir en négatif = gagner moins que les 42$ qu'il a dépensé pour s'inscrire)

g) Si François répète plusieurs fois le fait de jouer six Sit&Go, comment expliquez-vous qu'il terminera en négatif la majorité du temps, mais aura malgré tout une espérance de gain net positive ? (2 points)

2.17. EXAMEN SEPTEMBRE 2015

On s'intéresse à l'impact du tabagisme et du sport sur la santé. Actuellement, 27% des belges fument et 34% des belges font du sport régulièrement. La probabilité conditionnelle qu'un belge fume, sachant qu'il fait régulièrement du sport est de 9%. On tire sept belges au hasard dans la population.

a) Quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux fument ? (2 points)

b) Quelle est la probabilité qu'au moins trois d'entre eux soient des non-fumeurs qui font du sport régulièrement ? (4 points)

c) Quelle est l'espérance et la variance du nombre de personnes qui fument et ne font pas régulièrement du sport parmi les sept ? (4 points)

En outre, en Belgique, les non-fumeurs vivent en moyenne 7 ans de plus que les fumeurs. Une personne n'ayant jamais fumé a une probabilité de 42% d'avoir un cancer dans sa vie, tandis qu'une personne ayant arrêté de fumer a une probabilité de 50% et un fumeur de 65%. La moitié de la population belge n'a encore jamais fumé. La probabilité de guérir d'un cancer est de 63%. La probabilité conditionnelle de guérir d'un cancer sachant que la personne fait régulièrement du sport est de 76%.

d) Une personne a un cancer. Quelle est la probabilité qu'elle fume ? (3 points)

e) Deux personnes qui ne se connaissent pas ont un cancer. Quelle est la probabilité que ces deux personnes n'aient jamais fumé ? (3 points)

f) Un journaliste tire au hasard une personne dans la population belge. Si cette personne fait régulièrement du sport et a survécu à un cancer, il lui fait passer une interview pour un article sur le sujet. Sinon, il recommence la procédure. Combien de personnes faut-il être prêt à tirer pour que la probabilité d'avoir trouvé une personne à interviewer soit supérieure à 99% ? (4 points)

Solutions des exercices suggérés

2.6. a) $\approx$ 96,5% b) $\approx$ 85,5%

2.7. a) $\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{K-1}$ b) 4 jets

2.8. $\approx$ 0,4266%

2.9. $\approx$ 38 %

2.10. a) 6,46% b) 97,77% c) 6,61% d) 0,118% e) 27,2 f) 2,486

2.11. a) 10,24% b) 38% c) 10,95% d) 1,046 e) 0,046

2.12. a) 39,32% b) $-4,32$ € c) $32,59$ €

2.13. a) 10,15% b) $\approx$ 73,9% c) $\approx$ 33,2% d) $\approx$ 57,3%

2.14. a) 12,6% b) 66% c) 58,6 d) 34,6% e) 6,9%

2.15. a) $P(A) = \frac{3}{14}$ $P(B) = \frac{2}{7}$ b) Non c) $\frac{9}{8}$ d) $1 - (\frac{5}{7})^n$ e) 14

2.16. a) 5,15% b) 59,45% c) 29,41% d) 4,32$ e) 26,14$ f) 55,77%
g) Même si François perd de l'argent plus de 50% du temps, les fois où il gagne, il gagne en moyenne bien plus que les fois où il perd, ce qui fait qu'au final, il termine en positif en moyenne.

2.17. a) 31,74% b) 37,43% c) 1,75 et 1,315 d) 35% e) 17,6% f) 16 personnes