Eléments du calcul des probabilités

Répétition 1

16 février 2016

Exercices

1.1. On jette un dé rouge, puis un dé noir et enfin un blanc. On note les résultats dans l'ordre.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois chiffres différents ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois 6 ?

c) Quelle est la probabilité de ne pas obtenir 6 ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 ?

e) Si les trois dés avaient été blancs (indistincts) et jetés simultanément, quelle(s) probabilité(s) aurai(en)t changé ? Vérifiez le explicitement dans le cas de la probabilité d'obtenir trois chiffres différents.

1.2. Un tricheur utilise un dé dont le centre de gravité est légèrement décentré. Ce dernier est plus éloigné du 6 que du 1, un peu plus éloigné du 5 que du 2 et à équidistance entre 3 et 4. La probabilité d'obtenir un 6 a été estimée à $\frac{13}{60}$, celle d'un 5 à $\frac{11}{60}$, celle d'un 2 à $\frac{9}{60}$ et celle d'un 1 à $\frac{7}{60}$.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois de suite un nombre ≥ 3 ?

1.3. En Belgique, une grille de LOTTO comporte 45 cases, dont 6 sont à cocher. Lors du tirage, 6 numéros et 1 numéro bonus sont tirés au sort (sans répétition) parmi 45 boules numérotées de 1 à 45. Le lotto utilise le système suivant pour calculer les montants des gains :

Rang	Combinaison gagnante	% du montant des mises attribué
1	6	Variable 13,5%/17,5%
2	5+	Variable 3,69%
3	5	Variable 3,5%
4	4+	Variable 1,75%
5	4	Variable 3,24%
6	3+	Variable 1,73%
7	3	Montant fixe 5 €
8	2+	Montant fixe 3 €

a) Quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?

b) Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot ?

1.4. Une société qui fabrique des GSM les livre à ses fournisseurs par paquets de 1000. Elle a constaté que 0,4% des GSM des paquets comportent un défaut grave, 2,3% comportent un défaut léger et le reste est en parfait état. Deux clients achètent tour à tour un GSM auprès d'un fournisseur. Les appareils étant les deux premiers d'un même paquet, quelle est la probabilité :

   a) que les 2 GSM comportent un défaut grave
   b) que le premier client ait un GSM en bon état, mais que le second ait un GSM comportant un défaut léger
   c) que l'un des clients ait un GSM en bon état et l'autre un GSM comportant un défaut léger.

1.5. Supposons que la probabilité qu'un premier bachelier réussisse le cours de géométrie soit de 70%, que celle qu'il réussisse le cours d'algèbre soit de 60% et que celle qu'il réussisse ces deux cours soit de 40%.

   a) Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins un des deux cours ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il rate les deux ?
   c) Quelle est la probabilité qu'il réussisse le cours de géométrie s'il a réussi l'algèbre ?
   d) Quelle est la probabilité qu'il rate le cours de géométrie s'il a raté l'algèbre ?

1.6. La probabilité que la Belgique gagne un match de football à domicile contre un pays de l'UEFA a été estimée à 62% par temps sec et 70% par temps pluvieux. Au stade Roi Baudoin, la probabilité de temps pluvieux lors d'un match de foot a été estimée à 30%. Sachant que la Belgique vient de gagner un match au stade Roi Baudoin, quelle est la probabilité qu'il ait plu ?

1.7. Une population compte 1% de diabétiques. Un test de dépistage déclare un diabétique positif avec une probabilité de 0,98 et déclare un non-diabétique négatif avec une probabilité de 0,99. Quelle est la probabilité qu'un déclaré positif le soit à tort et qu'un individu déclaré négatif soit diabétique ?

Exercices suggérés

1.8. On distribue les cartes d'un paquet de 52 cartes.

   a) Quelle est la probabilité que la $14^{ème}$ soit un as ?
   b) Quelle est la probabilité pour que le 1^{er} as survienne à la $14^{ème}$ carte ?

1.9. Un père et une mère de quatre enfants ont tous les deux les yeux marrons. Calculez la probabilité que 3 des enfants aient les yeux marrons, en sachant que le père et la mère ont tous deux un allèle "yeux bleus" et un allèle "yeux marrons" et que ce dernier est dominant (chaque enfant a ainsi une chance sur quatre d'avoir les yeux bleus, indépendamment des autres enfants).

1.10. Alain propose à Boris de jouer au jeu qu'il vient d'inventer. Pour décider qui commence, les joueurs jettent chacun un dé. Alain gagne le droit de commencer s'il obtient au moins autant que Boris. Le jeu proprement dit consiste à tirer une bille d'une urne contenant une bille rouge, une noire et une verte. Si Alain commence et qu'il tire la rouge, il gagne directement. Sinon, il remet la bille dans l'urne et Boris tire une bille à son tour. Si elle est rouge, Alain gagne, sinon, c'est Boris. Si c'est Boris qui commence, et qu'il tire une bille rouge, Alain gagne, sinon, Boris gagne directement. Les joueurs ont-ils la même probabilité de gagner à ce jeu ? Sinon, lequel est avantagé ?

1.11. Une urne contient 4 billes blanches et 5 billes noires. Une seconde urne contient 5 billes blanches et 4 billes noires. On tire deux billes de la première urne (sans remise) et on les place dans la seconde. On tire ensuite une bille de la seconde urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une bille blanche ?

1.12. Huit tours sont disposées au hasard sur un échiquier. Calculer la probabilité qu'aucune ne puisse en prendre une autre, c'est-à-dire qu'il y ait exactement une seule tour sur chaque ligne et sur chaque colonne. Suggestion : procéder par récursion.

1.13. Un ascenseur qui dessert 10 étages part du rez-de-chaussée avec 7 personnes à bord. Chaque personne choisit un étage au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il ne sorte jamais plus d'une personne par étage ?

1.14. Un voleur s'introduit dans une maison pendant la nuit. Arrivé dans la chambre, il s'apprête à fouiller les deux tiroirs de la commode. Le premier contient 5 pièces d'or et 8 pièces d'argent, tandis que le second en contient 7 d'or et 4 d'argent. Maladroit, il a oublié de remplacer la pile de sa lampe de poche, qui tombe en panne. Au même moment, le chien des voisins se réveille et commence à aboyer. Dans sa précipitation, il n'arrive qu'à ouvrir l'un des tiroirs et prend une pièce au hasard avant de s'enfuir en courant.

   a) Quelle est la probabilité que la pièce soit en or ?

   b) Si la pièce est en argent, quelle est la probabilité qu'elle soit issue du premier tiroir ?

1.15. Cet exercice est tiré d'une histoire réelle. En 1999, Sally Clark a été condamnée pour le meurtre de ses deux bébés. La défense plaida le décès par mort subite du nourrisson. L'accusation fît témoigner un pédiatre qui, sachant que la probabilité d'une mort subite a été estimée à une chance sur 8543, calcula que la probabilité de deux morts subites est de 8543×8543, soit plus ou moins une chance sur 73 millions. Sally Clark fût condamnée principalement sur base de cette probabilité, étant donné qu'il n'y avait aucune preuve formelle.

a) Pourquoi le raisonnement du pédiatre est-il incorrect ?

b) En faisant le raisonnement correct, on estime que la probabilité d'avoir deux morts subites dans un cas comme celui qui nous occupe est d'une chance sur 100.000. Peut-on pour autant en déduire que la probabilité que Sally Clark ait tué ses bébés est de 99,999% ?

c) En supposant que les 2 seules causes de décès possibles soient le meurtre et la mort subite du nourrisson, utilisez le théorème de Bayes pour déterminer la probabilité que le décès des enfants de Sally Clark soit du à la mort subite du nourrisson. Sur base des statistiques de condamnation de parents pour meurtre de leur enfant, la probabilité d'un assassinat par meurtre de 2 enfants a été estimée à 0,0000046.

Suggestion : Pour le point *b*, faire une analogie avec le lotto peut aider.

1.16. Un jeune enfant range ses 20 DVD dans leurs coffrets (1 DVD par coffret). Ne sachant pas encore lire les titres figurant sur les DVD, il les range au hasard. Quelle est la probabilité qu'au moins 1 DVD soit rangé dans le bon coffret ?

a) Quelle est la probabilité que lors de l'appui d'au moins un des n interrupteurs, la LED de la couleur correspondante à celle de l'interrupteur se soit allumée ?

b) Calculer la limite de cette probabilité pour $n \to \infty$.

Solutions des exercices suggérés

1.8. a) $\approx$ 7,7% b) $\approx$ 3,1% 1.9. $\approx$ 42,2% 1.10. Alain $\approx$ 46,3% Boris $\approx$ 53,7%

1.11 $\approx$ 53,5% 1.12. $\approx$ 0,00091% 1.13. $\approx$ 6% 1.14 a) $\approx$ 51% b) $\approx$ 62,7%

1.15 a) Il n'y a pas indépendance entre les évènements. Les deux morts subites ont eu lieu dans la même famille et il peut y avoir des causes génétiques, bactériennes, ...

b) Lorsqu'un événement extrêmement improbable a lieu, calculer ensuite la probabilité qu'il ait eu lieu sans tenir compte du nombre de répétitions de la situation pouvant donner lieu à l'événement en question est une très mauvaise idée. Des millions de famille ont au moins deux enfants et certaines auront donc forcément la malchance d'avoir deux morts subites. Il faut calculer la probabilité conditonnelle que les enfants de Sally Clark soient décédés à cause de la mort subite du nourisson, sachant qu'ils sont morts (utiliser le théorème de Bayes).

c) $\approx$ 68% voir http ://plus.maths.org/content/beyond-reasonable-doubt

1.16 Exercice difficile qui sera résolu lors de la deuxième répétition.